

Грамматики Ламбека и контекстно-свободные грамматики

М. Р. Пентус, 8.10.2005, 15.10.2005

Пример 1. Грамматика Ламбека.

$\Sigma = \{ \text{John, Val, succeeds, exists, helps, recommends, gives, student, professor, book, a, the, every, this, strange, whenever, whom, relatively, everywhere, or, him, her, he, she} \}$

John succeeds whenever Val recommends a book or helps the student whom this relatively strange professor recommends.

$$\begin{aligned}
 f(\text{John}) &= f(\text{Val}) = \{np\} \\
 f(\text{succeeds}) &= f(\text{exists}) = \{np \setminus s\} \\
 f(\text{helps}) &= f(\text{recommends}) = \{(np \setminus s) / np\} \\
 f(\text{gives}) &= \{((np \setminus s) / np) / np\} \\
 f(\text{student}) &= f(\text{professor}) = f(\text{book}) = \{n\} \\
 f(\text{a}) &= f(\text{the}) = f(\text{every}) = \{np / n\} \\
 f(\text{this}) &= \{np / n, np\} \\
 f(\text{strange}) &= \{n / n\} \\
 f(\text{whenever}) &= \{(s \setminus s) / s\} \\
 f(\text{whom}) &= \{(n \setminus n) / (s / np)\} \\
 f(\text{relatively}) &= \{(n / n) / (n / n)\} \\
 f(\text{everywhere}) &= \{(np \setminus s) \setminus (np \setminus s)\} \\
 f(\text{or}) &= \{np \setminus (np / np), \\
 &\quad s \setminus (s / s), \\
 &\quad (np \setminus s) \setminus ((np \setminus s) / (np \setminus s))\} \\
 f(\text{him}) &= f(\text{her}) = \{(s / np) \setminus s\} \\
 f(\text{he}) &= f(\text{she}) = \{s / (np \setminus s)\}
 \end{aligned}$$

Определение 2. Аксиомы и правила исчисления Ламбека.

$$\begin{array}{l}
 A \rightarrow A \qquad \qquad \qquad \frac{\Phi \rightarrow B \quad \Gamma B \Delta \rightarrow A}{\Gamma \Phi \Delta \rightarrow A} \text{ (cut)} \\
 \\
 \frac{A \Pi \rightarrow B}{\Pi \rightarrow (A \setminus B)} (\rightarrow \setminus) \text{ (если } \Pi \text{ непуста)} \qquad \frac{\Phi \rightarrow A \quad \Gamma B \Delta \rightarrow C}{\Gamma \Phi (A \setminus B) \Delta \rightarrow C} (\setminus \rightarrow) \\
 \frac{\Pi A \rightarrow B}{\Pi \rightarrow (B / A)} (\rightarrow /) \text{ (если } \Pi \text{ непуста)} \qquad \frac{\Phi \rightarrow A \quad \Gamma B \Delta \rightarrow C}{\Gamma (B / A) \Phi \Delta \rightarrow C} (/ \rightarrow) \\
 \frac{\Gamma \rightarrow A \quad \Delta \rightarrow B}{\Gamma \Delta \rightarrow (A \cdot B)} (\rightarrow \cdot) \qquad \frac{\Gamma A B \Delta \rightarrow C}{\Gamma (A \cdot B) \Delta \rightarrow C} (\cdot \rightarrow)
 \end{array}$$

Если секвенция $\Gamma \rightarrow A$ выводится в исчислении Ламбека, то пишут $L \vdash \Gamma \rightarrow A$.

Пример 3. Вывод в исчислении Ламбека.

$$\frac{\frac{(np \setminus s) \rightarrow (np \setminus s) \quad \frac{np \rightarrow np \quad s \rightarrow s}{np (np \setminus s) \rightarrow s} (\setminus \rightarrow)}{np (np \setminus s) ((np \setminus s) \setminus (np \setminus s)) \rightarrow s} (\setminus \rightarrow)}{\text{Mary smiles charmingly}}$$

Пример 4. John recommends him or gives Mary a book.

$$\begin{aligned} f(\text{recommends him}) &= ((\eta p \setminus s) / \eta p) ((s / \eta p) \setminus s) \\ f(\text{gives Mary a book}) &= (((\eta p \setminus s) / \eta p) / \eta p) \eta p (\eta p / n) n \end{aligned}$$

Существует ли такая категория C , что

$$L \vdash ((\eta p \setminus s) / \eta p) ((s / \eta p) \setminus s) \rightarrow C \text{ и } L \vdash (((\eta p \setminus s) / \eta p) / \eta p) \eta p (\eta p / n) n \rightarrow C?$$

Определение 5. Умножение в свободной группе.

$$\begin{aligned} (u p_i) \cdot (p_i^{-1} v) &\rightleftharpoons u \cdot v, \\ (u p_i^{-1}) \cdot (p_i v) &\rightleftharpoons u \cdot v, \\ \text{в остальных случаях } x \cdot y &\rightleftharpoons xy. \end{aligned}$$

Пример 6. $(s n^{-1} n^{-1}) \cdot (n s^{-1}) = s n^{-1} s^{-1}$.

Определение 7. Нахождение обратного элемента в свободной группе.

$$\begin{aligned} (\varepsilon)^{-1} &\rightleftharpoons \varepsilon, \\ (u p_i)^{-1} &\rightleftharpoons p_i^{-1} (u)^{-1}, \\ (u p_i^{-1})^{-1} &\rightleftharpoons p_i (u)^{-1}. \end{aligned}$$

Пример 8. $(n^{-1} n^{-1} s)^{-1} = s^{-1} n n$.

Определение 9. Интерпретация категорий исчисления Ламбека в свободной группе.

$$\begin{aligned} \llbracket p_i \rrbracket &\rightleftharpoons p_i, \\ \llbracket A \cdot B \rrbracket &\rightleftharpoons \llbracket A \rrbracket \cdot \llbracket B \rrbracket, \\ \llbracket A \setminus B \rrbracket &\rightleftharpoons \llbracket A \rrbracket^{-1} \cdot \llbracket B \rrbracket, \\ \llbracket B / A \rrbracket &\rightleftharpoons \llbracket B \rrbracket \cdot \llbracket A \rrbracket^{-1}. \end{aligned}$$

Пример 10. $\llbracket (s / \eta p) \rrbracket = s(\eta p)^{-1}$.
 $\llbracket ((s / \eta p) \setminus s) \rrbracket = (s(\eta p)^{-1})^{-1} \cdot s = \eta p$.

Лемма 11. Пусть $L \vdash A_1 \dots A_n \rightarrow B$. Тогда $\llbracket A_1 \rrbracket \cdot \dots \cdot \llbracket A_n \rrbracket = \llbracket B \rrbracket$.

Пример 12. $L \vdash ((\eta p \setminus s) / \eta p) \rightarrow (\eta p \setminus (s / \eta p))$.
 $\llbracket ((\eta p \setminus s) / \eta p) \rrbracket = (\eta p)^{-1} s (\eta p)^{-1}$ и $\llbracket (\eta p \setminus (s / \eta p)) \rrbracket = (\eta p)^{-1} s (\eta p)^{-1}$.

Теорема 13. Следующие условия равносильны:

- $L \vdash A \rightarrow C$ и $L \vdash B \rightarrow C$ для некоторой категории C ,
- $L \vdash D \rightarrow A$ и $L \vdash D \rightarrow B$ для некоторой категории D ,
- $\llbracket A \rrbracket = \llbracket B \rrbracket$.

Пример 14. John (recommends him) or (gives Mary a book).

$$\begin{aligned} \llbracket ((\eta p \setminus s) / \eta p) \rrbracket \cdot \llbracket ((s / \eta p) \setminus s) \rrbracket &= (\eta p)^{-1} s, \\ \llbracket (((\eta p \setminus s) / \eta p) / \eta p) \rrbracket \cdot \llbracket \eta p \rrbracket \cdot \llbracket (\eta p / n) \rrbracket \cdot \llbracket n \rrbracket &= (\eta p)^{-1} s. \end{aligned}$$

Теорема 15 (Ламбек). Любую секвенцию, выводимую в исчислении Ламбека, можно вывести без использования правила (cut).

Пример 16. Рассмотрим вывод

$$\frac{\frac{\frac{\vdots}{(n/n) n \rightarrow n} \quad np \rightarrow np}{(np/n) (n/n) n \rightarrow np} (/ \rightarrow) \quad \frac{\frac{\vdots}{np ((np \setminus s)/np) np \rightarrow s} \quad (cut)}{np ((np \setminus s)/np) (np/n) (n/n) n \rightarrow s}}{John \text{ recommends } a \text{ strange book}}$$

Преобразуем его к виду

$$\frac{\frac{\frac{\vdots}{(n/n) n \rightarrow n} \quad np \rightarrow np}{np ((np \setminus s)/np) (np/n) (n/n) n \rightarrow s} (/ \rightarrow) \quad \frac{\frac{\vdots}{np ((np \setminus s)/np) np \rightarrow s} \quad (cut)}{np ((np \setminus s)/np) (np/n) (n/n) n \rightarrow s}}$$

Затем получим

$$\frac{\frac{\frac{\vdots}{(n/n) n \rightarrow n} \quad \frac{\frac{\vdots}{np ((np \setminus s)/np) np \rightarrow s}}{np ((np \setminus s)/np) (np/n) (n/n) n \rightarrow s} (/ \rightarrow)}$$

Теорема 17. Пусть $L \vdash A \rightarrow C$. Тогда существует такая категория I , что

- (i) $L \vdash A \rightarrow I$;
- (ii) $L \vdash I \rightarrow C$;
- (iii) $\mathbf{Var}(I) \subseteq \mathbf{Var}(A) \cap \mathbf{Var}(C)$.

(Категория I называется интерполянтom секвенции $A \rightarrow C$.)

Пример 18. Интерполянтom для секвенции $((np/n) \cdot n) \rightarrow ((s/np) \setminus s)$ является np . Действительно, $L \vdash ((np/n) \cdot n) \rightarrow np$ и $L \vdash np \rightarrow ((s/np) \setminus s)$.

Определение 19. Секвенция называется *тонкой*, если каждая входящая в неё атомарная категория встречается в ней ровно два раза.

Теорема 20. Пусть $L \vdash \Phi \Theta \Psi \rightarrow C$, где $\Phi \Theta \Psi \rightarrow C$ является тонкой и Θ не является пустой. Тогда существует такая категория I , что

- (i) $L \vdash \Theta \rightarrow I$;
- (ii) $L \vdash \Phi I \Psi \rightarrow C$;
- (iii) секвенция $\Theta \rightarrow I$ является тонкой;
- (iv) секвенция $\Phi I \Psi \rightarrow C$ является тонкой;
- (v) $\|I\| = \|\Theta\|$.

Теорема 21. *Формальный язык можно задать грамматикой Ламбека тогда и только тогда, когда он является контекстно-свободным.*

Пример 22. Грамматика Ламбека. $\Sigma = \{\text{Africa, sleeps, idea, this, green}\}$.

$$\begin{aligned} f(\text{Africa}) &= \{np\} \\ f(\text{sleeps}) &= \{np \backslash s\} \\ f(\text{idea}) &= \{n\} \\ f(\text{this}) &= \{np/n, np\} \\ f(\text{green}) &= \{n/n\}. \end{aligned}$$

Пример грамматически корректного предложения:

$$\frac{\frac{\frac{\vdots}{(n/n) \ n \rightarrow n} \quad \frac{\frac{\frac{\vdots}{(np/n) \ n \rightarrow np} \quad \frac{\frac{\vdots}{np \ (np \backslash s) \rightarrow s}}{(np/n) \ n \ (np \backslash s) \rightarrow s}}{(np/n) \ (n/n) \ n \ (np \backslash s) \rightarrow s}}{(np/n) \ (n/n) \ n \ (np \backslash s) \rightarrow s}}{\text{this green idea sleeps}} \text{ (cut).}$$

Пример 23. Контекстно-свободная грамматика.

$$\begin{aligned} \Sigma &= \{\text{Africa, sleeps, idea, this, green}\} \\ N &= \{s, n, np, (s \backslash s), (s \backslash n), (s \backslash np), (n \backslash s), (n \backslash n), (n \backslash np), (np \backslash s), (np \backslash n), (np \backslash np), \\ &\quad (s/s), (s/n), (s/np), (n/s), (n/n), (n/np), (np/s), (np/n), (np/np), \\ &\quad (s \cdot s), (s \cdot n), (s \cdot np), (n \cdot s), (n \cdot n), (n \cdot np), (np \cdot s), (np \cdot n), (np \cdot np)\} \end{aligned}$$

$$\begin{array}{ll} s \mapsto s (s \backslash s) & np \mapsto \text{Africa} \\ s \mapsto n (n \backslash s) & (np \backslash s) \mapsto \text{sleeps} \\ s \mapsto np (np \backslash s) & n \mapsto \text{idea} \\ s \mapsto (s/s) s & (np/n) \mapsto \text{this} \\ s \mapsto (s/n) n & np \mapsto \text{this} \\ s \mapsto (s/np) np & (n/n) \mapsto \text{green} \\ \vdots & \\ n \mapsto (n/n) n & \\ np \mapsto (np/n) n & \\ (n/n) \mapsto (n/n) (n/n) & \\ \vdots & \\ (np \cdot np) \mapsto np np & \\ (np \cdot np) \mapsto (np/n) (n \cdot np) & \\ (np \cdot np) \mapsto (np/np) (np \cdot np) & \end{array}$$

(Всего 141 правило.)

$$s \Rightarrow np (np \backslash s) \Rightarrow (np/n) n (np \backslash s) \Rightarrow (np/n) (n/n) n (np \backslash s) \Rightarrow \dots \Rightarrow \text{this green idea sleeps}$$