Дополнительные пояснения
к работе В.В. Кромера «Арктангенс или логиста? (К вопросу диахронического скачка)»

В обсуждаемой работе (ОР) приведена формула (1) для плотности распределения $p(x) = \frac{A}{x^{1+\alpha}}$ лингвистической инертности *x*. С учетом ограниченности ресурсов источника лингвистического воздействия (ИЛВ), характеризуемого внутренним сопротивлением *R*, формула (1) при распространении ее на область всех действительных $x \in (-\infty, \infty)$ принимает вид $p(x) = \frac{A}{R + |x|^{1+\alpha}}$, где *A* – нормирующий множитель, определяемый исходя из условия $\int_{-\infty}^{+\infty} p(x)dx = 1$. В ОР рассмотрен частный случай с наиболее типичным значением $\alpha = 1$, соответствующим закону Ципфа. Далее в ОР показано, что решение дифференциального уравнения (ДУ) $\frac{dF(t)}{dt} = rF^{\beta}(t)(1 - F(t))^{\beta}$ при $\beta = 2$ близко к функции распределения, задаваемой плотностью $p(x) = \frac{A}{1 + x^2}$ при соответствующей нормировке. В ходе частной переписки по ОР одним из корреспондентов был задан вопрос, почему выбрано именно значение $\beta = 2$. Для ответа приходится рассмотреть наиболее общий случай $p(x) = \frac{A}{1 + |x|^{1+\alpha}}$ при различных значениях $\alpha \in (0, \infty)$. Для “хвостов” распределения (при $|x| >> 1$) пренебрегаем внутренним сопротивлением ИЛВ (ИЛВ работает с малой нагрузкой в режиме, близком к режиму “холостого хода”), откуда $p(x) \approx \frac{A}{|x|^{1+\alpha}}$. В области малых значений *F*(*t*), где $x << -1$, $F(t) = \int_{-\infty}^{x} p(x)dx \approx \int_{-\infty}^{x} \frac{A}{|x|^{1+\alpha}}dx = \frac{A}{\alpha|x|^{\alpha}}$, откуда $\frac{dF(t)}{dt} = \frac{\alpha^{\left(1+\frac{1}{\alpha}\right)}}{A^{\frac{1}{\alpha}}} F^{\left(1+\frac{1}{\alpha}\right)}$. Итак, в области малых *x* (в начале процесса ДС) $\frac{dF(t)}{dt} = rF^{\beta}(t)$, где $r = \frac{\alpha^{\left(1+\frac{1}{\alpha}\right)}}{A^{\frac{1}{\alpha}}}$, а

$\beta = 1 + \frac{1}{\alpha}$. Исходя из соображений симметрии распространяем формулу на область $x \in (-\infty, \infty)$: $\frac{dF(t)}{dt} = rF^{\beta}(t)(1 - F(t))^{\beta}$. При $\alpha = 1$ получаем $\beta = 2$. Именно этот случай и рассматривается в ОР. ДС осуществляется согласно функции распределения Коши. При $\alpha > 2$ распределение $F(t)$ гауссово [1, с. 107], чему соответствует $\beta < 1{,}5$. Под этот случай подпадает логистическое распределение с $\beta = 1$ (α очень велико). Негауссовым распределениям соответствует $\alpha < 2$ [там же] и $\beta > 1{,}5$. Под этот случай подпадает рассмотренный в ОР случай $\beta = 2$ с ходом процесса ДС, близким к функции распределения Коши (см. рис. 2 в ОР).

Рассмотрим устойчивость распределения с плотностью $p(x) = \frac{A}{1 + |x|^{1+\alpha}}$ к изменениям параметра α. Значение R далее принимается равным 1, поскольку изменение R вносит непринципиальные для нашего рассмотрения изменения масштаба. Далее также не делается разница между x и t, поскольку согласно ОР $x = t - t_0$, а t_0 принимаем равным 0. Значения A, определенные согласно условию $\int_{-\infty}^{+\infty} p(x)dt = 1$ по формуле $A = \frac{1}{\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1 + |x|^{1+\alpha}}} = \frac{0{,}5}{\int_{0}^{+\infty} \frac{1}{1 + x^{1+\alpha}}}$ приведены в таблице 1 в зависимости от α.

Таблица 1

α	0	0,5	1	2	3
A	0	$\frac{3\sqrt{3}}{8\pi} = 0{,}2067$	$\frac{1}{\pi} = 0{,}3183$	$\frac{3\sqrt{3}}{4\pi} = 0{,}4135$	$\frac{\sqrt{2}}{\pi} = 0{,}4502$
$\beta = 1 + \frac{1}{\alpha}$	∞	3	2	1,5	$\frac{4}{3}$
$\frac{A_1}{A_\alpha}$	∞	$\frac{8}{3\sqrt{3}} = 1{,}5396$	1	$\frac{4}{3\sqrt{3}} = 0{,}7698$	$\frac{1}{\sqrt{2}} = 0{,}7071$

Проинтегрировав $F(t)=\int\limits_{-\infty}^{x} p(x)dx=\int\limits_{-\infty}^{x}\frac{A}{1+|x|^{1+\alpha}}$, получаем следующие зависимости для хода диахронического скачка:

$\alpha = 0{,}5$

$$F(t)=0{,}5+\operatorname{sgn}(x_\alpha)\left(0{,}125-\frac{\sqrt{3}}{8\pi}\ln\frac{\left(1+\sqrt{|x_\alpha|}\right)^2}{1-\sqrt{|x_\alpha|}+|x_\alpha|}+\frac{3}{4\pi}arctg\,\frac{2\sqrt{|x_\alpha|}-1}{\sqrt{3}}\right), \quad (1)$$

где $\operatorname{sgn}(z)$ – сигнум-функция $\operatorname{sgn}(z)=\begin{cases}1, \textit{если } z>0,\\ 0, \textit{если } z=0,\\ -1, \textit{если } z<0.\end{cases}$ [2, с. 1129].

$\alpha = 1$

$$F(t)=0{,}5+\frac{1}{\pi}arctg\ x_\alpha. \quad (2)$$

$\alpha = 2$

$$F(t)=0{,}5+\operatorname{sgn}(x_\alpha)\left(0{,}125+\frac{\sqrt{3}}{8\pi}\ln\frac{\left(1+|x_\alpha|\right)^2}{1-|x_\alpha|+x_\alpha{}^2}+\frac{3}{4\pi}arctg\,\frac{2|x_\alpha|-1}{\sqrt{3}}\right). \quad (3)$$

$\alpha = 3$

$$F(t)=0{,}5\left[\theta(x_\alpha+1)+\theta(x_\alpha-1)\right]+\frac{1}{4\pi}\left(\ln\frac{x^2+\sqrt{2}\,x_\alpha+1}{x^2-\sqrt{2}\,x_\alpha+1}+2arctg\,\frac{\sqrt{2}\,x_\alpha}{1-x_\alpha^2}\right), \quad (4)$$

где $\theta(z)$ – функция Хевисайда $\theta(z)=\begin{cases}1, \textit{если } z\ge 0,\\ 0, \textit{если } z<0.\end{cases}$ [3, с. 1107].

Нанесение зависимостей по (1, 2, 3, 4) от аргумента x на один график нецелесообразно, поскольку все зависимости характеризуются отличающимися значениями полуинтерквартильной широты. Производная от $F(t)$ (значение $p(x)$) при $x=0$ равна A. На рис. 1 представлены зависимости согласно (1, 2, 3, 4) от значения аргумента $x_\alpha=\frac{A_1}{A_\alpha}x$, где A_α – значение A при рассматриваемом α, а A_1 – значение A при $\alpha=1$ (выбрано произвольно в качестве эталона для сравнения). Подобное представление позволяет сравнивать распределения по поведению их «хвостов» при $x\to-\infty$ либо $x\to+\infty$.

Значения $\frac{A_1}{A_\alpha}$ приведены в таблице 1 в зависимости от α. В ОР сравниваемые зависимости нормировались по совпадению 2 и 4 квартили, что приближенно эквивалентно использованной здесь нормировке по производной $F(t)$ при $x=0$ ввиду незначительного отклонения зависимостей $F(t)$ от прямой в средней части. На рис. 1 нанесены также логистическая зависимость и функция нормального распределения, также с соответствующей нормировкой по производной $F(0)$, что требует умножения аргумента логистической функции на $\frac{4}{\pi}$, а аргумента функции нормального распределения на $\sqrt{\frac{2}{\pi}}$.

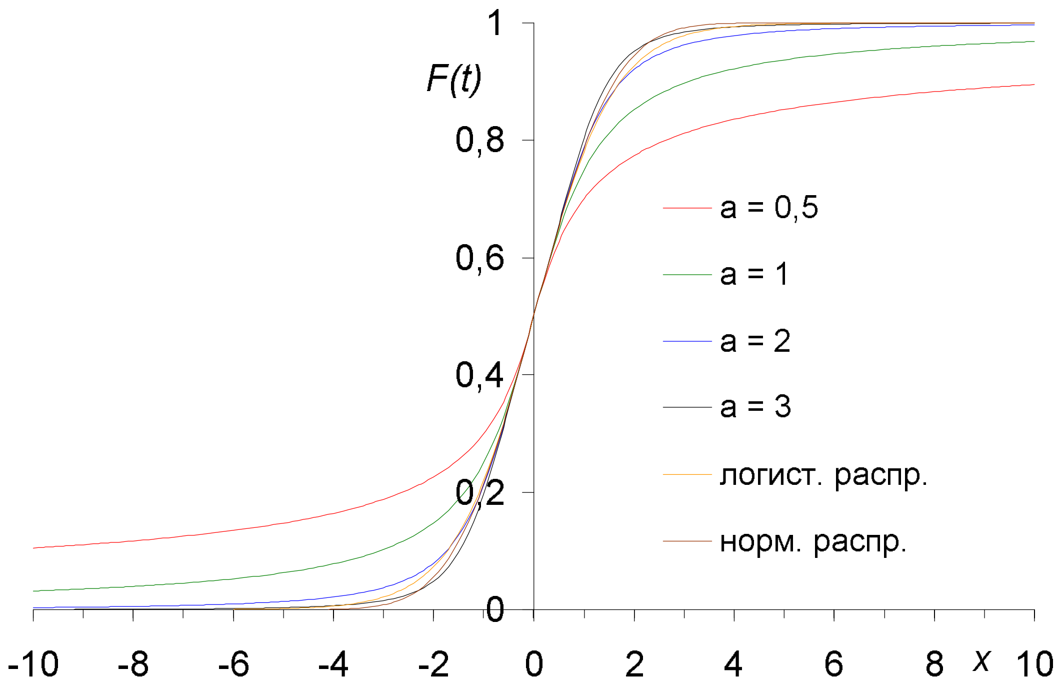

Рис. 1.

Видно, что распределения Ципфа-Парето с $\alpha=2$, $\alpha=3$, логистическое и нормальное распределения незначительно разнятся (лежат в узкой полосе ±1,9 % от некоторого «среднего» распределения, см. рис. 2).

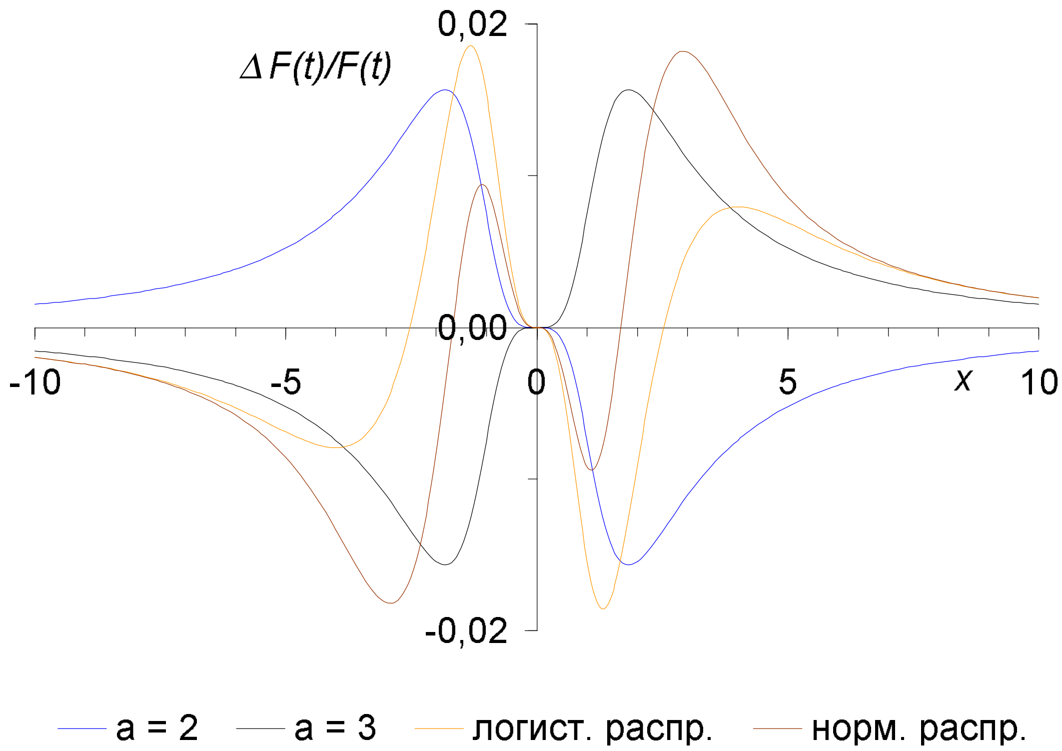

Рис. 2.

В ОР зависимость, полученная интегрированием ципфовой плотности $p(x)=\dfrac{A}{1+x^2}$; $(\alpha=1)$, сравнивалась с зависимостью, полученной путем решения дифференциального уравнения $\dfrac{dF(t)}{dt}=rF^2(t)(1-F(t))^2$; $(\beta=2)$, и устанавливалось, что зависимости близки. Покажем, что подобные параллельные зависимости существуют и для других сочетаний α и β, связанных соотношением $\beta=1+\dfrac{1}{\alpha}$. Найдем решения дифференциального уравнения $\dfrac{dF(t)}{dt}=rF^{\beta}(t)(1-F(t))^{\beta}$ при начальном условии $F(-\infty)=0$:

$\beta=1{,}5$

$$x=\frac{1}{r\sqrt{1-F(t)}}\left(4\sqrt{F(t)}-\frac{2}{\sqrt{F(t)}}\right). \qquad (5)$$

$\beta=2$

$$x=\frac{1}{r}\left(\frac{1}{1-F(t)}-\frac{1}{F(t)}-2\ln\frac{1-F(t)}{F(t)}\right). \qquad (6)$$

$\beta = 3$

$$x = \frac{1}{r}\left(\frac{1}{2(1-F(t))^2} - \frac{1}{2F^2(t)} + \frac{3}{1-F(t)} - \frac{3}{F(t)} - 6\ln\frac{1-F(t)}{F(t)}\right). \qquad (7)$$

Производная $\frac{dF(t)}{dt}$ при $x = 0$ равна $\frac{dF(t)}{dt} = rF^{\beta}(0)(1-F(0))^{\beta} = 0{,}5^{2\beta}r$. В таблице 2 приведены значения A_{β} – производной $\frac{dF(t)}{dt}$ зависимостей (5, 6, 7) и значения r, обеспечивающие значение $A_{\beta} = \frac{1}{\pi}$ (значение A_1 согласно таблице 1).

Т а б л и ц а 2

β	1,5	2	3
A_{β}	$\frac{1}{8}r$	$\frac{1}{16}r$	$\frac{1}{64}r$
r	$\frac{8}{\pi}$	$\frac{16}{\pi}$	$\frac{64}{\pi}$

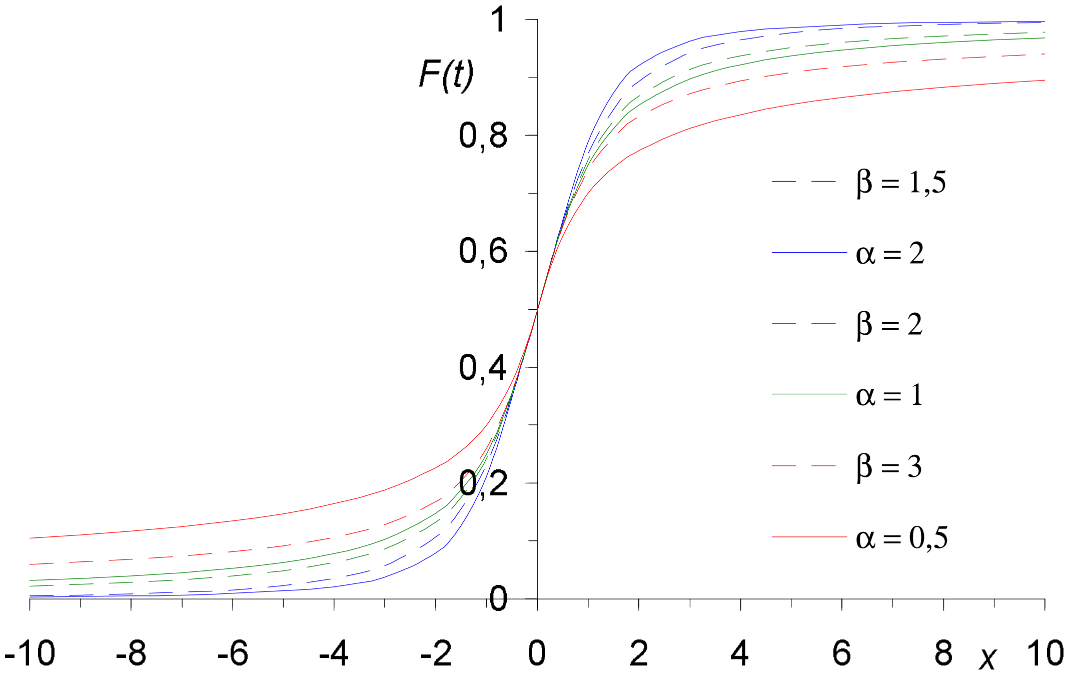

Рис. 3.

На рис. 3 нанесены нормализованные по $\frac{dF(t)}{dt}$ зависимости (1, 2, 3) и соответственно (7, 6, 5). Видно, что попарно близки зависимости (1)–(7), (2)–(6) и (3)–(5), т.е. связанные выведенным соотношением $\beta = 1 + \frac{1}{\alpha}$. Остаточная разница между сравниваемыми зависимостями может быть объяснена приближенностью выведенного соотношения $\beta = 1 + \frac{1}{\alpha}$ и может быть уменьшена небольшой коррекцией параметров. Так, из рис. 3 видно, что зависимость для $\beta = 3$ (где расхождение наибольшее для сравниваемых трех пар) будет соответствовать зависимости с несколько большим значением α, чем предписываемое значение $\alpha = 0{,}5$. Существующая тесная связь между между процессами, протекающими в соответствии с распределением Ципфа-Парето с плотностью $p(x) = \frac{A}{1 + |x|^{1+\alpha}}$ и решением дифференциального уравнения $\frac{dF(t)}{dt} = rF^{\beta}(t)(1 - F(t))^{\beta}$ может быть интерпретирована в терминах эволюции материи от гауссовых природных систем к негауссовым социальным через промежуточные биологические системы и дальнейшее развитие все более творческих видов человеческой деятельности [1, с. 111]. С ростом творческого наполнения вида человеческой деятельности уменьшается параметр распределения Ципфа-Парето α [там же], что в соответствии с формулой $\beta = 1 + \frac{1}{\alpha}$ ведет к увеличению β. Значение $\beta = 0$ свойственно развитию неживой материи. Система ведет себя как единый элемент, связь в системе единственная (система замкнута на самое себя). При $\beta = 1$ имеем гауссову систему (α очень велико, в пределе $\alpha = \infty$), что соответствует гауссову неципфовому распределению [1, с. 107], например логисте. Количество связей в системе совпадает с количеством элементов системы N, т.е. каждый элемент замкнут на самое себя. Связи между элементами отсутствуют. При $\beta = 2$ количество связей в системе равно N^2, т.е. двусторонней связью связаны все возможные в системе пары. Развитие в системе осуществляется согласно функции распределения Коши или близкому к нему. При $\beta = 3$ система отражается в каждом из своих элементов, т.е. каждый элемент подобен всей системе. «В каждой капле воды отражается океан». «Хвосты» распределения еще более длинные, чем «хвосты» распределения Коши. С дальнейшим ростом β количество связей составляет N^{β}, система все более фрактализируется.

Дробным значениям β соответствуют промежуточные варианты. Рассмотрим пример с $1<\beta<2$. Фрактальность отсутствует, каждый элемент имеет $N^{\beta-1} < N$ связей, т.е. элемент связан не с каждым из N элементов системы. Взамен детерминированных связей (случай при $\beta=2$) выступают вероятностные. С вероятностью $q_1=1$ реализуется лишь связь на самое себя, все элементы (включая рассматриваемый) ранжируются по вероятности установления связи q_n (зависящей, например, от пространственного расположения элементов) от 1 до минимальной, где n – ранг элемента (от 1 до N). Условие нормировки – $\sum_{n=1}^{N} q_n = N^{\beta-1}$. Заменив сумму ряда интегралом, получаем одно из возможных приближенных решений $q_n = \dfrac{\beta-1}{n^{2-\beta}}$, точность которого возрастает с ростом n.

Заключая, делаем вывод, что характер динамических процессов в системе определяется размерностью связей, распределением вероятностей установления связей между элементами, степенью самоподобия в системе. Случай с $\beta=2$ наиболее типичен, поскольку отвечает распределению Ципфа-Парето с наиболее типичным значением $\alpha=1$.

Литература

1. Хайтун С.Д. Проблемы количественного анализа науки. М.: Наука, 1989.
2. Математическая энциклопедия / Гл. ред. И.М. Виноградов. Т. 4. М.: Советская Энциклопедия, 1984.
3. Математическая энциклопедия / Гл. ред. И.М. Виноградов. Т. 3. М.: Советская Энциклопедия, 1984.