Стохастические транспортные сети и устойчивость динамических систем

В.И. Оселедец, Д.В. Хмелёв

11 ноября 1998

Аннотация

Рассмотрена сеть содержащая N узлов и rN приборов, первоначально находящихся в узлах. В каждый узел поступает пуассоновский поток заявок интенсивности $\lambda(t)$. Заявка, попавшая в пустой узел, покидает систему. Если в узле есть приборы, то из них равновероятно выбирается прибор, который забирает заявку и перемещает ее в случайный узел, который выбирается равновероятно. Время перемещения распределено экспоненциально со средним значением 1. Число обслуживающих приборов в каждом из N узлов не превосходит m.

Мы исследуем устойчивость предельного детерминированного процесса, получаемого при $N \to \infty$. Далее, мы применяем наши результаты к системе массового обслуживания со сложной дисциплиной выбора прибора.

Ключевые слова: Марковские процессы, нелинейные динамические системы, глобальная асимптотическая устойчивость, производящий оператор, сходимость, метод среднего поля, теория массового обслуживания.

Содержание

1 Введение

Рассмотрим сеть из N узлов, 1 виртуального узла и rN обслуживающих приборов. В каждый узел пуассоновским потоком с интенсивностью $\lambda(t)$ поступают заявки. Пуассоновские потоки заявок в разные узлы независимы. Заявка, попавшая в пустой узел, покидает систему. Если заявка попадает в узел с приборами, то случайно и равновероятно выбирается один из приборов, который забирает заявку и переходит в виртуальный узел. Там прибор находится экспоненциально распределенное время со средним значением 1, затем прибор перемещается в узел, равновероятно выбираемый из всех N узлов. Если число приборов в выбранном узле равно m, прибор ждет следующей попытки в виртуальном узле экспоненциально распределенное время со средним 1. Таким образом, в каждом узле (кроме виртуального) может находиться от 0 до m приборов.

Введем дроби $f_k = n_k/N$, $V = W/N$, где n_k — (случайное) число узлов, количество приборов в которых равно k, а W — количество приборов, находящихся в виртуальном узле. В технических целях удобно перейти к накопленным вероятностям $u_k = \sum_{i=k}^m f_i$.

Пространство X_N состояний марковского процесса $U_N(t)$, который описывает систему, содержит всех такие вектора $u = (u_1, \ldots, u_m, V)^{\mathrm{т}}$ из $(1/N)\mathbb{Z}_+^{m+1}$, что

$$1 = u_0 \geq u_1 \geq \ldots \geq u_m \geq 0,\ V \geq 0 \text{ и } V + u_1 + \ldots + u_m = r. \tag{1}$$

Производящий оператор $A_N(t)$ процесса $U_N(t)$ действует на функции и задается следующим образом

$$\begin{aligned} A_t^N f(u) = N\lambda(t) \sum_{k=1}^{m-1} (u_k - u_{k+1})[f(u - e_k/N + e_{m+1}/N) - f(u)] + \\ + N\lambda(t) u_m [f(u - e_m/N + e_{m+1}/N) - f(u)] + \\ + NV \sum_{k=1}^{m} (u_{k-1} - u_k)[f(u + e_k/N - e_{m+1}/N) - f(u)], \end{aligned} \tag{2}$$

где e_i — вектор, i-тая координата которого равна 1, а остальные координаты равны 0.

Метод среднего поля подсказывает, что в пределе при $N \to \infty$ эволюция u становится детерминированной. Более точно: пусть X означает множество всех векторов $\mathbb{R}^{m+1}$, удовлетворяющих (1). Тогда, если распределение начального состояния $U_N(0)$ сходится к дираковской дельта-функции, сконцентрированной в точке $g \in X$, то распределение $U_N(t)$ сосредотачивается при больших

N на траектории $u(t) \in X$, удовлетворяющей системе дифференциальных уравнений

$$\dot{u} = f(u(t), \lambda(t)), \tag{3}$$

где

$$\begin{aligned} f_i(u, \lambda) &= \lambda(u_{i+1} - u_i) + V(u_{i-1} - u_i),\ i = 1, \ldots, m-1,\ u_0 = 1, \\ f_m(u, \lambda) &= -\lambda u_m + V(u_{m-1} - u_m), \\ f_{m+1}(u, \lambda) &= \lambda u_1 - V(1 - u_m). \end{aligned} \tag{4}$$

Техническим инструментом в исследовании поведения этой нелинейной системы служит теорема 3.3 о глобальной асимптотической устойчивости систем дифференциальных уравнений весьма общего вида. Эта теорема, которая, в частности, дает возможность исследовать случай зависимых от времени коэффициентов, представляет несомненный практический и теоретический интерес.

2 Основные определения и результаты

Норма $\|\cdot\|$ определяется как $\|u\| = |u_1| + \ldots + |u_m| + |V|$. Мы предполагаем, что

$$\min_{t \geq \tau} \lambda(t) = \bar{\lambda} > 0 \text{ и } \sup_{t \geq \tau} \lambda(t) < \infty. \tag{5}$$

Теорема 2.1. *Пусть $\lambda(t)$ — кусочно-непрерывная функция. Тогда*

(а) для всех $g \in X$ в X существует единственное решение $u(t, \tau, g)$, $t \geq \tau$ задачи Коши (3) *с $u(\tau, \tau, g) = g$;*

(б) существует такое $\gamma > 0$, что для любых $g, g' \in X$

$$\|u(t, \tau, g) - u(t, \tau, g')\| \leq const \cdot \exp(-\gamma(t - \tau));$$

(в) если функция $\lambda(t)$ периодическая с периодом T, то существует такое единственное $g^* \in X$, что $u(t, \tau, g^*)$ является T-периодическим решением (3) *и для любого $g \in X$*

$$\|u(t, \tau, g) - u(t, \tau, g^*)\| \leq const \cdot \exp(-\gamma(t - \tau));$$

(г) если $\lambda(t)$ постоянна, то существует и единственно такое $g^* \in X$, что $u(t, \tau, g^*) = g^*$ и для любого $g \in X$

$$\|u(t, \tau, g) - g^*\| \leq const \cdot \exp(-\gamma(t - \tau)).$$

Стационарное решение g^* пункта (г) легко находится (см. [1]). Определим семейство операторов $T_N = T_N(t, \tau)$ по правилу

$$T_N(t, \tau) f(g) = \mathbf{E}(f(U_N(t)) \mid U_N(\tau) = g),\ g \in X_N. \tag{6}$$

Теорема 2.2. *Если $\lambda(t)$ кусочно-постоянна, то для всех $f \in C(X)$, равномерно по t на произвольном отрезке из $\mathbb{R}_\tau^+ = \{t \geq \tau\}$,*

$$\lim_{N\to\infty} \sup_{\tau\leq s\leq t} \sup_{g\in X_N} |T_N(s,\tau)f(g) - f(u(s,\tau,g))| = 0. \tag{7}$$

Обозначим через ε_g дельта-меру Дирака, сосредоточенную в точке $g \in X$.

Теорема 2.3. *Пусть выполнены условия теоремы 2.2. Если $U_N(\tau)$ по распределению сходится к ε_g, то*

$$\forall t \geq \tau \sup_{\tau\leq s\leq t} \|U_N(s) - u(s,\tau,g)\| \to 0 \text{ по вероятности.}$$

Если $\lambda(t)$ периодична с периодом T, то процессы $U_{N,t}(n) = U_N(t+nT)$, где $n = 0, 1, \ldots$, образуют множество однородных цепей Маркова с дискретным временем и конечным числом состояний, каждая из которых в силу связности обладает единственной инвариантной мерой $\mu_{N,t} = \mu_{N,t+T}$. Пункт (в) теоремы 2.1 утверждает, что у системы (3) существует единственный инвариантный цикл $u(t, 0, g^*)$.

Теорема 2.4. *Пусть $\lambda(t) = \lambda(t+T)$. Тогда*

(а) для $t \in [0,T)$ на множестве X существует единственная вероятностная мера, инвариантная относительно динамической системы $g \to u(t+T,t,g)$, $g \in X$. Эта мера сосредоточена в точке $u(t, 0, g^*)$, т.е. равна $\varepsilon_{u(t,0,g^*)}$;

(б) инвариантные меры $\mu_{N,t}$ процессов $U_{N,t}$ сходятся по вероятности к $\varepsilon_{u(t,0,g^*)}$,

Последняя теорема охватывает также случай $\lambda(t) \equiv \text{const}$. Действительно, тогда $\mu_{N,t} = \mu_N$, где μ_N — стационарная мера процесса U_N и $\mu_N \to \varepsilon_{g^*}$ по вероятности.

3 Вспомогательные утверждения

3.1 Коэффициент эргодичности и его свойства.

Введем линейное подпространство $L = \{x \in \mathbb{R}^n : x_1 + \ldots + x_n = 0\}$. Линейное отображение $A\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ назовем *марковским*, если $A\mathbb{R}_+^n \subseteq \mathbb{R}_+^n$, $(1, \ldots, 1)A = (1, \ldots, 1)$. Заметим, что отображение A — марковское, если его транспонированная матрица является стохастической. Пусть $A = aB$ — отображение, пропорциональное марковскому отображению B с коэффициентом пропорциональности $a > 0$. Для такого отображения A определим *коэффициент эргодичности* $k(A)$ по правилу $k(A) = \|A\| - \|A\|_L$. Здесь

$$\|A\| = \sup_{x\in\mathbb{R}^n, \|x\|=1} \|Ax\| = \max_i \|Ae_i\|,$$

$$\|A\|_L = \sup_{x\in L, \|x\|=1} \|Ax\| = \max_{i,j} \|A(e_i - e_j)\|/2, \tag{8}$$

где $\|x\| = |x_1| + \ldots + |x_n|$, а $\{e_k\}$ — стандартный базис в $\mathbb{R}^n$. Отметим, что $\|B\| = 1$, $k(B) = 1 - \|B\|_L$ и $k(A) = ak(B)$. Для стохастических матриц $B^{\text{т}}$ коэффициент эргодичности ввел Р.Л. Добрушин и его определение совпадает с нашим (см. [2, с.77, (1.12')] и [3, с.372, (3.22)]). Наше определение обладает важным свойством монотонности, доказанным в лемме 3.2.

Линейное отображение A *неотрицательно* (*положительно*), если $A\mathbb{R}^n_+ \subseteq \mathbb{R}^n_+$ ($A\mathbb{R}^n_+ \subset \mathrm{Int}(\mathbb{R}^n_+)$). Если $A - B$ неотрицательно, мы пишем $A \geq B$, (если $A - B$ положительно, $A > B$). Из определений следует, что матрицы просто сравниваются покомпонентно.

В дальнейшем нам потребуются следующие две леммы относительно неотрицательных матриц.

Лемма 3.1. *Пусть $A \geq B \geq 0$ и $C \geq D \geq 0$. Тогда $AC \geq BD \geq 0$.*

Для доказательства достаточно сложить неравенства $(A - B)C \geq 0$ и $B(C - D) \geq 0$. По индукции из этой леммы получаем, что если $A_1 \geq B \geq 0$, $\ldots$, $A_n \geq B \geq 0$, то $A_n \ldots A_1 \geq B^n$.

Лемма 3.2. *Пусть $A = aC$ и $B = bD$, где C и D — марковские отображения и a, $b > 0$. Если $A > B \geq 0$, то $k(A) > k(B)$. Если $A \geq B \geq 0$, то $k(A) \geq k(B)$*

Доказательство. Пусть $\|A\| = a$, $\|B\| = b$. Ввиду неравенства треугольника $\|A\|_L \leq \|A-B\|_L + \|B\|_L$. Если $A-B > 0$, то, ввиду (8), $\|A-B\|_L < \|A-B\|$. Поскольку $\|(A - B)e_i\| = a - b$, то $\|A - B\| = \|A\| - \|B\|$. Следовательно, $\|A\|_L < \|A\| - \|B\| + \|B\|_L$ или $\|B\| - \|B\|_L < \|A\| - \|A\|_L$, что и требовалось. Случай $A \geq B$ рассматривается аналогично. □

3.2 Глобальная асимптотическая устойчивость некоторых динамических систем.

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = f(x, z(t)),\ x \in \mathbb{R}^n,\ z(t) \in \Omega, \tag{9}$$

где Ω — компакт в евклидовом пространстве, $f(x, z)$ дифференцируемо по x и матрица Якоби

$$J(x, z) = \partial f/\partial x = (\partial f_i/\partial x_j)$$

непрерывны по своим аргументам. Эти условия обеспечивают существование и единственность решения $x(t,\, t_0,\, g)$ системы (9) с $x(t_0,\, t_0,\, g) = g$.

Положим по определению

$$\alpha(z) = -\min_i \min_{x\in X} J_{ii}(x, z),\ X \subset \mathbb{R}^n. \tag{10}$$

Пусть $\sum_{i=1}^{n} x_i$ — первый интеграл системы (9), т.е. $\sum_{i=1}^{n} f_i(x,z) = 0$. Отсюда следует, что $J(x,\ z)L \subset L$. Мы наложим более сильное ограничение: для всех $t \geq 0$, $x \in X$ и $z \in \Omega$ матрица $\exp(tJ)$ задает марковское отображение, что эквивалентно условию неотрицательности недиагональных элементов и равенству нулю суммы всех строк матрицы J.

Пусть X — компактное выпуклое подмножество аффинного многообразия $L + c$, $c \in \mathbb{R}^n$, и, кроме того, X инвариантно относительно динамической системы (9). Теперь предположим, что существует такая матрица $B \geq 0$, что

(а) для всех $z \in \Omega$, $x \in X$ $J(x,z) + (\zeta + \alpha(z))I \geq B$, где I является единичной матрицей, $\zeta \geq 0$;

(б) B — пропорциональна марковской матрице и для некоторого $n_0 \in \mathbb{N}$ коэффициент эргодичности $k((I+B)^{n_0}) > 0$.

Теорема 3.3. *Для любого* $t_0 \in \mathbb{R}$ *и* $\tau > 0$ *отображение* $x(t_0+\tau,\ t_0,\ \cdot)$: $X \to X$ *является сжимающим. Если, сверх того, при фиксированном* τ *и фиксированной функции* $z(t)$

$$\sup_{t_0 \in \mathbb{R}} \exp\left(\int_{t_0}^{t_0+\tau} \alpha(z(t))dt\right) = C(\tau) < \infty,$$

то коэффициент сжатия отображения $x(t_0+\tau,\ t_0,\ \cdot)$ *равномерно по* t_0 *ограничен сверху числом* $q < 1$.

Доказательство. Пусть $\Phi(t_0+\tau,\ t_0,\ g) = \partial x(t_0+\tau,\ t_0,\ g)/\partial g$ матрица Якоби отображения $x(t_0+\tau,\ t_0,\ \cdot)$: $X \to X$. Тогда Φ задает марковское отображение. Из теории дифференциальных уравнений известно, что $\Phi'_\tau = J\big(x(t_0+\tau,\ t_0,\ g),\ z(t)\big)\Phi(t_0+\tau,\ t_0,\ g)$, $\Phi(t_0,\ t_0,\ g) = I$ (это — т.н. уравнение в вариациях). Введем

$$\Psi(\tau) = \Phi \exp\left(\zeta\tau + \int_{t_0}^{t_0+\tau} \alpha(z(t))dt\right)$$

и

$$A(\tau) = J\big(x(t_0+\tau, t_0, g), z(t)\big) + (\zeta + \alpha(z(t_0+\tau)))I.$$

Из неравенства $A(\tau) \geq B$ и уравнения $\Psi'(\tau) = A(\tau)\Psi(\tau)$, $\Psi(0) = I$, с помощью леммы 3.1 можно получить следующие оценки:

$$\Psi(\tau) \geq \exp(\tau B) \geq \frac{\tau^{n_0}\exp(-\tau)}{(n_0)!}(I+B)^{n_0}.$$

Принимая во внимание лемму 3.2, получаем

$$k(\Psi(\tau)) \geq \frac{\tau^{n_0}\exp(-\tau)}{(n_0)!}k((I+B)^{n_0}) > 0.$$

Поскольку

$$k(\Phi) = k(\Psi)\exp\left(-\zeta\tau - \int_{t_0}^{t_0+\tau} \alpha(z(t))dt\right),$$

обнаруживаем, что $k(\Phi) > 0$, или $\|\Phi\| - \|\Phi\|_L > 0$. Поскольку $\|\Phi\| = 1$, находим, что $\sup_{g\in X}\|\Phi\|_L < 1$. При условии $C(\tau) < \infty$ легко получить равномерную оценку по t_0.

Наконец, положим

$$\gamma(s) = (1-s)g_1 + sg_2,\ 0 \le s \le 1,\ g_1,\ g_2 \in X.$$

Замечая, что $\gamma'(s) = g_2 - g_1 \in L$, получаем

$$\|x(t_0+\tau, t_0, g_2) - x(t_0+\tau, t_0, g_1)\| \le \int_0^1 \|\Phi\big(t_0+\tau, t_0, \gamma(s)\big)\gamma'(s)\|ds \le$$

$$\le \sup_{g\in X}\|\Phi\|_L \int_0^1 \|\gamma'(s)\|ds = \sup_{g\in X}\|\Phi\|_L\|g_2 - g_1\|.$$

Последнее доказывает теорему. □

4 Доказательства теорем 2.1–2.4

Доказательство теоремы 2.1. Матрица Якоби J правой части (3) равна

$$J(u,\lambda) = \begin{pmatrix} -\beta & \lambda & 0 & \dots & 0 & 0 & (1-u_1) \\ V & -\beta & \lambda & \dots & 0 & 0 & (u_1-u_2) \\ 0 & V & -\beta & \dots & 0 & 0 & (u_2-u_3) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -\beta & \lambda & (u_{m-2}-u_{m-1}) \\ 0 & 0 & 0 & \dots & V & -\beta & (u_{m-1}-u_m) \\ \lambda & 0 & 0 & \dots & 0 & V & -(1-u_m) \end{pmatrix},$$

где $\beta = \lambda + V$.

Проверим выполнение условий теоремы 3.3. Во-первых, множество X является выпуклым компактным подмножеством $\mathbb{R}^{m+1}$ и является подмножеством аффинного многообразия $L + re_{m+1}$, где L — линейное подпространство $\mathbb{R}^{m+1}$ векторов с суммой координат равной 0.

Во-вторых, матрица Якоби задает марковское отображение Φ и

$$\alpha(\lambda) = -\min_i \min_{x\in X} J_{ii}(x,\lambda) = \max(\lambda + r, 1 + r/m).$$

Далее, $J(x,\lambda(t)) + (\bar\lambda + \alpha(\lambda(t)))I \ge B$, где

$$B = \begin{pmatrix} 0 & \bar\lambda & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \bar\lambda & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \bar\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \bar\lambda & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \bar\lambda \end{pmatrix},$$

$\bar{\lambda}$ определена в (5).

Матрица $(I+B)^m$ имеет следующий вид:

$$(I+B)^m = \begin{pmatrix} * & * & * & \dots & * & * & 0 \\ 0 & * & * & \dots & * & * & 0 \\ 0 & 0 & * & \dots & * & * & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & * & * & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & * & 0 \\ * & * & * & \dots & * & * & * \end{pmatrix},$$

где $*$ обозначены положительные элементы матрицы.

Отсюда вытекает, что $k((I+B)^m) > 0$. Остается проверить инвариантность X относительно (3).

Достаточно проверить инвариантность $\operatorname{Int} X$. Если последнее утверждение выполнено, ввиду непрерывной зависимости траекторий (9) от начального условия, всякое решение (9) с начальной точкой на относительной границе X, никогда не покинет X.

Пусть компоненты вектора $u(\tau,\, \tau,\, g) = (u_1(\tau),\, \dots,\, u_m(\tau),\, V(\tau)) \in \operatorname{Int} X$. Выполнены следующие строгие неравенства

$$1 = u_0 > u_1 > u_2 > \dots > u_m > 0,\, V > 0. \tag{11}$$

Пусть для любого $t \in [\tau, t_0)$ $u(t,\, \tau,\, g) \in \operatorname{Int} X$, но $u(t_0,\, \tau,\, g) \notin \operatorname{Int} X$. В момент t_0 некоторые неравенства в (11) превращаются в равенства.

Если $V(t_0) = 0$ то $\left.\dfrac{dV}{dt}\right|_{t=t_0-0} = \lambda(t_0-0)u_1(t_0) \geq \bar{\lambda}r/m > 0$ и мы приходим к противоречию с тем, что $V(t_0) - V(t) < 0$ для $t < t_0$.

Следовательно, заведомо $V(t_0) > 0$. Для уменьшения числа частных случаев введем виртуальную переменную $u_{m+1} \equiv 0$. С ее помощью мы можем переписать выражение для f_m в (4):

$$f_m(u, \lambda) = \lambda(u_{m+1} - u_m) + V(u_{m-1} - u_m).$$

Поскольку $1 = u_0 > u_{m+1} = 0$ возможны только следующие два случая. 1) Существует такое i, что $u_{i-1}(t_0) = u_i(t_0) > u_{i+1}(t_0)$, 2) существует такое j, что $u_{j-1}(t_0) > u_j(t_0) = u_{j+1}(t_0)$.

В случае 1) $\left.\dfrac{du_{i-1}}{dt}\right|_{t=t_0-0} = V(t_0)(u_{i-2}(t_0) - u_{i-1}(t_0)) \geq 0$, $\left.\dfrac{du_i}{dt}\right|_{t=t_0-0} = \lambda(t_0-0)(u_{i+1}(t_0) - u_i(t_0)) < 0$. Получаем $\left.\dfrac{d(u_{i-1}-u_i)}{dt}\right|_{t=t_0-0} > 0$ и приходим к противоречию с тем, что $[u_{i-1}(t_0) - u_i(t_0)] - [u_{i-1}(t) - u_i(t)] < 0$ при $t < t_0$. Случай 2) рассматривается аналогично. Аналогичная идея использовалась в [4, Лемма 2].

Применение теоремы 3.3 дает все заключения теоремы 2.1 и завершает доказательство. □

Доказательство теоремы 2.2. Без потери общности предположим $\lambda(t) \equiv \lambda$ для любого t, следовательно, $T_N(t,\tau) = T_N(t-\tau)$. Теперь воспользуемся методом, изложенным в [2].

Пусть $C(X)$ — банахово пространство непрерывных функций на X с равномерной метрикой $\|f\| = \max_{x\in X}|f(x)|$. Определим полугруппу $T(t)$ на $C(X)$ по правилу

$$T(t)f(g) = f(u(t,\,0,\,g)). \tag{12}$$

В разделе 2 мы определили полугруппу $T_N(t) = T_N(t,0)$ на $C(X_N)$. Полугруппы $T(t)$, $T_N(t)$ сильно непрерывны. Пусть A (A_N) обозначает производящий оператор полугруппы $T(t)$ $(T_N(t))$. Обозначим через $D(A)$ область определения оператора A. Из (12) следует, что $f \in D(A)$ для любой функции $f \in C(X)$ с

$$\partial f/\partial u_1, \dots, \partial f/\partial u_m, \partial f/\partial V, \;\; \partial^2 f/\partial^2 u_1, \dots, \partial^2 f/\partial^2 u_m, \partial^2 f/\partial^2 V \in C(X).$$

Обозначим через D множество всех таких функций. Можно показать, что D является существенным (core, см. [4, с.31] и [5]) подпространством оператора A. Ввиду теорем о сходимости марковских процессов (см., например, [5, Chapter 1, Theorem 6.1]) достаточно проверить, что для всех $f \in D$

$$\lim_{N\to\infty} \sup_{x\in X_N} |A_N f(x) - Af(x)| = 0,$$

что можно проделать аналогично [4]. □

Доказательство теоремы 2.3. Теорема является следствием теоремы 2.2 и, например, [5, Chapter 4, Theorem 2.11]. □

Доказательство теоремы 2.4. Пункт (а) вытекает из пункта (в) теоремы 2.1.

Перейдем к доказательству пункта (б). Пусть $\mu_{N,t}$ — инвариантная мера процесса $U_{N,t}(n)$. Множество X компактно, следовательно, множество вероятностных мер на X также компактно относительно слабой сходимости. Из теоремы 2.2 следует, что всякая мера μ_t, являющаяся предельной точкой для последовательности мер $\mu_{N,t}$, инвариантна относительно полугруппы $T(t+nT)$, $n = 0,\,1,\,\dots$. Ввиду пункта (а), μ_t совпадает с мерой, сосредоточенной в точке $u(t,\,0,\,g^*)$ и доказательство завершено. □

5 Замечание о модели из [4]

В [4] рассмотрена модель системы обслуживания S_N, с N одинаковыми обслуживающими приборами с неограниченной очередью к каждому из них, наполняемая пуассоновским входным потоком с интенсивностью $N\lambda$. Времена обслуживания н.о.р. экспоненциально со средним 1. При прибытии каждая заявка выбирает случайно 2, возможно, совпадающих, прибора (с вероятностью $1/N^2$) и затем направляется к прибору с меньшей очередью (включая заявку, находящуюся в обслуживании). Если очереди к обоим приборам одинаковы, заявка наугад равновероятно выбирает одну из них. Мы рассмотрим систему S_N^m с ограничением m на максимальную длину очереди. В системе S_N^m заявка, выбравшая обе очереди с m заявками, покидает систему.

Уравнения среднего поля для S_N^m при $N \to \infty$ имеют следующий вид

$$\begin{aligned} \dot{u}_k &= (u_{k+1} - u_k) + \lambda(u_{k-1}^2 - u_k^2),\ k = 1, \ldots, m-1, \\ \dot{u}_m &= -u_m + \lambda(u_{m-1}^2 - u_m^2), \end{aligned} \tag{13}$$

где $1 = u_0 \geq u_1 \geq \ldots \geq u_m \geq 0$, u_k — доля приборов, в очереди к которым стоит не меньше k заявок (включая обслуживаемую в данный момент). Введем переменную V:

$$\dot{V} = u_1 + \lambda u_m^2 - \lambda, V \geq 0, V(0) = m - \sum_{i=1}^{m} u_i(0). \tag{14}$$

Пусть $x \in \mathbb{R}^{m+1}$ обозначает вектор

$$(x_1, \ldots, x_{m+1}) = (u_1, \ldots, u_m, V).$$

Запишем систему (13), (14) следующим образом

$$\dot{x} = f(x, \lambda) \tag{15}$$

Множество X (см. раздел 3.2) определяется так:

$$X = \{x \in \mathbb{R}^{m+1} | 1 \geq x_1 \geq \ldots \geq x_m \geq 0,\ x_{m+1} + \sum_{i=1}^{m} x_i = m, x_{m+1} \geq 0\}.$$

Ввиду [4, Лемма 1], множество X инвариантно относительно (15). Найдем матрицу Якоби

$$J(x, \lambda) = \begin{pmatrix} -\beta_1 & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ 2\lambda u_1 & -\beta_2 & 1 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2\lambda u_2 & -\beta_3 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & -\beta_{m-1} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 2\lambda u_{m-1} & -\beta_m & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 2\lambda u_m & 0 \end{pmatrix},$$

где $\beta_i = 1 + 2\lambda u_i$. Ввиду (10) $\alpha(\lambda) = 1 + 2\lambda$. Ясно, что $J(x,\, \lambda) + \alpha(\lambda)I \geq B$ где

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

Матрица $(I + B)^m$ имеет следующий вид

$$(I+B)^m = \begin{pmatrix} * & * & * & \dots & * & * & 0 \\ 0 & * & * & \dots & * & * & 0 \\ 0 & 0 & * & \dots & * & * & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & * & * & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & * & 0 \\ * & * & * & \dots & * & * & * \end{pmatrix},$$

где $*$ обозначает положительные элементы матрицы.

Отсюда вытекает, что $k((I + B)^m) > 0$ и, следовательно, справедлива

Теорема 5.1. *Для любого $\lambda > 0$, динамическая система (5.1), (5.2) имеет единственное экспоненциально глобально устойчивое стационарное решение.*

Рассмотрим систему

$$\dot{x} = f(x, \lambda(t)), \tag{16}$$

где $f(x,\, \lambda)$ определена в (15), а T-периодичная функция $\lambda(t)$ кусочно-непрерывна с $\inf \lambda(t) > 0$.

Следующая теорема непосредственно вытекает из теоремы 3.3.

Теорема 5.2. *Динамическая система* (16) *имеет единственную экспоненциально притягивающую T-периодичную траекторию.*

Благодарности

Авторы признательны профессору Л.Г. Афанасьевой за поддержку и стимулирующие обсуждения.

Работа первого автора поддержана грантами РФФИ N960100377 и N99-01-01104. Работа второго автора частично поддержана грантом s98-2042 фонда ISSEP.

Список литературы

1. *Afanassieva L.G., Fayolle G., Popov S.Yu.* Models for transportation networks. — Journal of Mathematical Science, 1997 v.84, N3, p. 1092–1103.

2. *Добрушин Р.Л.* Центральная предельная теорема для неоднородных цепей Маркова. I//Теория вероятностей и её приложения, Т.1, №1, с.72–89.

3. *Добрушин Р.Л.* Центральная предельная теорема для неоднородных цепей Маркова. II//Теория вероятностей и её приложения, Т.1, №4, с.365–425.

4. *Введенская Н.Д., Добрушин Р.Л., Карпелевич Ф.И.* Система обслуживания с выбором наименьшей из двух очередей — асимптотический подход. — Проблемы передачи информации, 1996, т. 32, N1, с. 20–34.

5. *Either S.N., Kurtz T.G.* Markov Processes characterization and convergence. N.Y.: John Willey and Sons, 1986, 529 p.

6. *Vvedenskaya N.D. and Suhov Yu.M.* Dobrushin's Mean-Field Approximation for a Queue with Dynamic Routing. — Markov Processes and related fields, 1997, N3, p. 493–526.

Перевод заглавия на английский язык:
Stochastic transportation networks and stability of dynamical systems