Предельные теоремы для несимметричных транспортных сетей*

Д. В. ХМЕЛЁВ
Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова
e-mail: dima@vvv.srcc.msu.su

УДК 519.216

Ключевые слова: марковский процесс, производящий оператор, стационарные меры, сходимость, нелинейные дифференциальные уравнения, стационарные точки, глобальная асимптотическая устойчивость.

Аннотация

Рассматривается последовательность моделей асимметричной транспортной сети, которые описываются марковскими процессами $U_N(t)$. Процессы эволюционируют в компактном подмножестве конечномерного действительного пространства $\mathbb{R}^\alpha$. Доказана сходимость $U_N(t)$ по вероятности к нелинейной динамической системе $\mathrm{g} \to \mathbf{u}(t, \mathrm{g})$ (в предположении сходимости начальных распределений $U_N(0) \to 0$). Динамическая система обладает единственной инвариантной мерой, к которой при $N \to \infty$ сходятся инвариантные меры процесса $U_N(t)$.

Abstract

D. V. Khmelev, Limit theorems for asymmetric transportation networks, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 7 (2001), no. 4, pp. 1259–1266.

We consider a model of an asymmetric transportation network. The transportation network is described by the Markov process $U_N(t)$. This process has values in a compact subset of the finite-dimensional real vector space $\mathbb{R}^\alpha$. We prove that $U_N(t)$ converges in distribution to a non-linear dynamical system $\mathrm{g} \to \mathbf{u}(t, \mathrm{g})$ (assuming convergence of initial distributions $U_N(0) \to \mathrm{g}$), where $\mathrm{g} \in \mathbb{R}^\alpha$. The dynamical system has the only invariant measure to which the invariant measures of processes $U_N(t)$ converge as $N \to \infty$.

Изучение асимптотического поведения систем со сложной дисциплиной обслуживания является популярной областью исследований и имеет разнообразные приложения, см., например, [1–5]. В данной работе рассматривается сеть из N узлов (станций), которые делятся на n районов. При увеличении N количество районов остается неизменным. Количество станций в районе j равно $d_j^N N$, $\sum\limits_{j=1}^{n} d_j^N = 1$, $d_j^N N$ — целое число для всяких j и N. Существуют такие $d_j > 0$, что $\sqrt{N}(d_j^N - d_j) \xrightarrow{N\to\infty} 0$ для $j = \overline{1, n}$. Далее j и v обозначают номер

*Работа частично поддержана грантом ISSEP s98-2042.

района и могут принимать значения от 1 до n. На станцию в районе j требования поступают пуассоновским потоком с интенсивностью $\lambda_j > 0$. Если на станции нет ни одного прибора, заявка теряется. Иначе прибор перемещает заявку.

Перемещение моделируется следующим образом. Прибор выбирает виртуальный узел (j, v) с вероятностью p_{jv}, остаётся там экспоненциально распределённое время с математическим ожиданием $1/\mu_{jv}$ и затем равновероятно наугад выбирает станцию в районе v. Матрица $P = \{p_{jv}\}_{j,v=\overline{1,n}}$ стохастическая. Все станции района v однотипны: на каждой из них может базироваться не более m_v приборов. Если прибор, который прибыл в район v, не находит свободной стоянки, то он направляется (без требования) в виртуальный узел (v, l) в соответствии со стохастической матрицей $\widetilde{P} = \{\tilde{p}_{vl}\}_{v,l=\overline{1,n}}$; первоначально на всех станциях в районе j находится r_j приборов, где r_j — целые числа от 1 до m_j. Для того чтобы наши теоремы были справедливы, необходимо следующее ограничение: матрица $(P + \widetilde{P})/2$ должна быть матрицей переходных вероятностей эргодичной цепи Маркова. Подоплёка последнего условия состоит в том, что приборы могут попасть из любого района в любой другой. Эта система является обобщением системы, рассматривавшейся в [1] и [4], в сторону асимметрии.

Обозначим через $f_{j,i}$ количество узлов с i приборами в кластере j, через V_{jv} количество приборов в виртуальном узле (j, v). Определим

$$u_{j,i} = \sum_{k=i}^{m_j} f_{ji}/N, \quad M_{jv} = V_{jv}/N.$$

Для $j = 1, \ldots, n$

$$d_j^N = u_{j,0} \geqslant u_{j,1} \geqslant \ldots \geqslant u_{j,m_j} \geqslant u_{j,m_j+1} = 0 \tag{1}$$

и для $v = 1, \ldots, n$

$$M_{jv} \geqslant 0 \quad \text{и} \quad \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{m_j} u_{j,i} + \sum_{v=1}^{n} M_{jv} \right) = \sum_{j=1}^{n} r_j d_j^N. \tag{2}$$

Обозначим через $\mathcal{U}_N$ множество векторов

$$\mathbf{u} = (u_{1,1}, \ldots, u_{1,m_1}, u_{2,1}, \ldots, u_{n,m_n}, M_{11}, M_{12}, \ldots, M_{nn})^{\mathrm{т}},$$

удовлетворяющих (1) и (2), где $u_{j,i} = x_{j,i}/N$, $M_{jv} = y_{jv}/N$ и $x_{j,i}, y_{jv}$ — неотрицательные целые числа.

Обозначим через $\mathcal{U}$ множество таких векторов

$$\mathbf{u} = (u_{1,1}, \ldots, u_{1,m_1}, u_{2,1}, \ldots, u_{n,m_n}, M_{11}, M_{12}, \ldots, M_{nn})^{\mathrm{т}},$$

что для $j = 1, \ldots, n$

$$d_j = u_{j,0} \geqslant u_{j,1} \geqslant \ldots \geqslant u_{j,m_j} \geqslant u_{j,m_j+1} = 0 \tag{3}$$

и для $v = \overline{1,n}$

$$M_{jv} \geqslant 0 \quad \text{и} \quad \sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{m_j} u_{j,i} + \sum_{v=1}^{n} M_{jv}\right) = \sum_{j=1}^{n} r_j d_j. \tag{4}$$

Очевидно, $\mathcal{U}_N \subset (1/N)\mathbb{Z}^\alpha$ и $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^\alpha$, где $\alpha = n^2 + \sum\limits_{j=1}^{n} k_j$. Для $l = 1, \ldots, \alpha$ обозначим через $\mathbf{e}_l \in \mathbb{R}^\alpha$ вектор, у которого координата l равна 1, а все остальные — нулю.

Пусть $\mathbf{e}_{u_{j,i}}$ ($\mathbf{e}_{M_{jv}}$) — единичный вектор $\mathbf{e}_{\varkappa(u_{j,i})}$ ($\mathbf{e}_{\varkappa(M_{jv})}$), где $\varkappa(u_{j,i})$ ($\varkappa(M_{jv})$) задаёт координату в векторе $\mathbf{u} \in \mathcal{U}$, соответствующую $u_{j,i}$ (M_{jv}).

Из данного выше описания следует, что мы рассматриваем однородную цепь Маркова с производящим оператором

$$A_N f(\mathbf{u}) = \int K_N(\mathbf{u}, d\mathbf{y})[f(\mathbf{u}+\mathbf{y}) - f(\mathbf{u})], \tag{5}$$

где $K_N(\mathbf{u}, d\mathbf{y})$ — следующее дискретное переходное ядро при $\mathbf{u} \in \mathcal{U}_N$:

$$K_N(\mathbf{u}, d\mathbf{y}) = \begin{cases} \text{для } j = \overline{1,n},\ i = \overline{1,m_j},\ v = \overline{1,n} \\ \text{с весом } N\lambda_j(u_{j,i} - u_{j,i+1})p_{jv} \text{ в точке } (-\mathbf{e}_{u_{j,i}} + \mathbf{e}_{M_{jv}})/N, \\ \text{для } j, v = \overline{1,n},\ i = \overline{1,m_v} \\ \text{с весом } N\mu_{jv}M_{jv}(u_{v,i-1} - u_{v,i})/d_v^N \text{ в точке } (\mathbf{e}_{u_{v,i}} - \mathbf{e}_{M_{jv}})/N, \\ \text{для } j, v = \overline{1,n},\ l = \overline{1,n} \\ \text{с весом } N\mu_{jv}M_{jv}u_{v,m_v}\tilde{p}_{vl}/d_v^N \text{ в точке } (-\mathbf{e}_{M_{jv}} + \mathbf{e}_{M_{vl}})/N, \end{cases}$$

где $u_{j,0} = d_j^N$ и $u_{j,m_j+1} = 0$. Область определения $\mathcal{D}(A_N)$ оператора A_N является некоторым подпространством $C(\mathcal{U}_N)$ непрерывных функций на $\mathcal{U}_N$. Первая группа весов соответствует прибытию заявки в узел в районе j. Вторая группа весов соответствует прибытию прибора в район v. Третья группа весов относится к случаю переполнения числа приборов в районе v ($u_{j,i} - u_{j,i+1}$ есть вероятность того, что наугад выбранный узел относится к району j и имеет i приборов).

Мы докажем (теорема 2), что для любого конечного интервала времени при $N \to \infty$ эволюция $\mathbf{u}$ удовлетворяет закону больших чисел и предельная детерминированная динамика описывается решением следующей системы нелинейных дифференциальных уравнений:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial u_{j,i}}{\partial t} &= M^j u_{j,i-1}/d_j - (\lambda_j + M^j/d_j)u_{j,i} + \lambda_j u_{j,i+1}, \\ \frac{\partial M_{jv}}{\partial t} &= \lambda_j u_{j,1} p_{jv} - \mu_{jv} M_{jv} + M^j u_{j,m_j}\tilde{p}_{jv}/d_j \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

при $j, v = \overline{1,n}$, $i = \overline{1,m_j}$, где $u_{j,0}(t) = d_j$, $u_{j,m_j+1}(t) = 0$ для всех t и $M^j(t) = \sum\limits_{l=1}^{n}\mu_{lj}M_{lj}(t)$. Далее мы рассмотрим решение (6) с начальными условиями

$$u_{j,i}(0) = g_{\varkappa(u_{j,i})}, \quad M_{jv}(0) = g_{\varkappa(M_{jv})}. \tag{7}$$

Обозначим через $\mathbf{u}(t, \mathbf{g})$ решение задачи Коши (6) и (7), $\mathbf{u}(0, \mathbf{g}) = \mathbf{g}$.

Марковский процесс $U_N = U_N(t)$, определяемый оператором (5) со значениями в $\mathcal{U}_N$, определяет полугруппу $T_N(t)$ на пространстве непрерывных функций $C(U_N)$. Если $f\colon \mathcal{U}_N \to \mathbb{R}$, то

$$T_N(t)f(\mathbf{u}) = \mathbf{E}(f(U_N(t)) \mid U_N(0) = \mathbf{u}), \quad \mathbf{u} \in \mathcal{U}_N.$$

Пусть $\gamma_j^N = d_j^N/d_j$. Линейный оператор $\eta_N\colon \mathcal{U} \to \mathbb{R}^\alpha$ отображает $\mathbf{u} \in \mathcal{U}$ в $(\gamma_1^N u_{1,1}, \dots, \gamma_1^N u_{1,m_1}, \gamma_2^N u_{2,1}, \dots, \gamma_n^N u_{n,m_n}, M_{11}, M_{12}, \dots, M_{nn})^{\mathrm{T}}$. Область определения $\mathcal{D}(\eta_N)$ оператора η_N включает все $\mathbf{u} \in \mathcal{U}$, для которых $\eta_N(\mathbf{u}) \in \mathcal{U}_N$.

Для $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^\alpha$ введём норму

$$\|\mathbf{x}\| = \sum_{i=1}^{\alpha} |x_i|.$$

Теорема 1. *Справедливы следующие утверждения.*

(а) *В $\mathcal{U}$ существует, единственно и неограниченно продолжаемое решение $\mathbf{u}(t,\mathbf{g})$ задачи Коши* (6), (7).

(б) *В множестве $\mathcal{U}$ существует единственное стационарное решение $\mathbf{g}^* \in \mathcal{U}$: $\mathbf{u}(t,\mathbf{g}^*) = \mathbf{g}^*$.*

(в) *Для некоторого $\gamma > 0$ для любого $\mathbf{g} \in \mathcal{U}$ $\|\mathbf{u}(t,\mathbf{g}) - \mathbf{g}^*\| \leqslant \operatorname{const} e^{-t\gamma}$.*

Пусть $C(\mathcal{U})$ — линейное пространство функций, непрерывных на $\mathcal{U}$.

Теорема 2. *Для любой $f \in C(\mathcal{U})$ для любого $t \geqslant 0$*

$$\lim_{N\to\infty} \sup_{0\leqslant s\leqslant t} \sup_{\mathbf{g}\in\mathcal{D}(\eta_N)} |T_N(t)f(\eta(\mathbf{g})) - f(\mathbf{u}(t,\mathbf{g}))| = 0.$$

Обозначим через $\varepsilon_{\mathbf{g}}$ распределение, сосредоточенное в точке $\mathbf{g} \in \mathcal{U}$.

Теорема 3. *Если $U_N(0)$ слабо сходится к $\varepsilon_{\mathbf{g}}$, то*

$$\forall t \quad \sup_{0\leqslant s\leqslant t} \|U_N(t) - \mathbf{u}(t,\mathbf{g})\| \to 0 \text{ по вероятности.}$$

Марковский процесс U_N обладает единственной стационарной мерой μ_N.

Теорема 4. *μ_N слабо сходится к $\varepsilon_{\mathbf{g}^*}$.*

Положим в системе (6) левые части равными 0. Мы получаем следующую систему нелинейных алгебраических уравнений:

$$\left.\begin{aligned} 0 &= M^j u_{j,i-1}/d_j - (\lambda_j + M^j/d_j)u_{j,i} + \lambda_j u_{j,i+1}, \\ 0 &= \lambda_j u_{j,1} p_{jv} - \mu_{jv} M_{jv} + M^j u_{j,m_j} \tilde{p}_{jv}/d_j \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

при $j, v = \overline{1,n}$, $i = \overline{1,m_j}$. В силу пункта (б) теоремы 1 существует и единственно решение (8), удовлетворяющее (3) и (4). Такое решение является единственным стационарным решением (6).

Пусть $x_{j,i} = u_{j,i} - u_{j,i+1}$ для $i = 0, \dots, m_j$, $x_{j,-1} = x_{j,m_j+1} = 0$. Находим, что $u_{j,1} = x_{j,1} + \dots + x_{j,m_j}$ и $u_{j,m_j} = x_{j,m_j}$. Можно проверить, что

$$\frac{x_{j,i}}{d_j} = \frac{\rho_j^i(\rho_j - 1)}{\rho_j^{1+m_j} - 1}, \tag{9}$$

где $\rho_j = M^j/(\lambda_j d_j)$. Замечаем, что ввиду (8) и (9) все $u_{j,i}$ и M_{jv} выражаются через M^j.

Введём вектора $a = (M^1, M^2, \dots, M^n)^{\mathrm{T}}$ и $b = \left(M^1 \frac{u_{1,m_1}}{d_1}, \dots, M^n \frac{u_{n,m_n}}{d_n}\right)^{\mathrm{T}}$. Ввиду (9) u_{j,m_j} выражается через M^j. Получается, что b выражается через a. Ввиду (8) получаем систему

$$a^{\mathrm{T}} = (a - b(a))^{\mathrm{T}} P + (b(a))^{\mathrm{T}} \widetilde{P}. \tag{10}$$

Пусть $\mathbf{u}(a)$ обозначает решение (8), выраженное через a. Ввиду теоремы 1 существует и единственно такое решение (10), что $\mathbf{u}(a) \in \mathcal{U}$. Явные формулы для a появляются в частных случаях, перечисленных в следующей теореме. Пусть $L(\mathbf{u}) = \sum\limits_{j=1}^{n} \Big(\sum\limits_{i=1}^{m_j} u_{j,i} + \sum\limits_{v=1}^{n} M_{jv} \Big)$.

Теорема 5. *Предположим, что $P\widetilde{P}$ обладает единственной инвариантной мерой $\pi = (\pi_1, \dots, \pi_n)^{\mathrm{T}}$, $\pi^{\mathrm{T}} P \widetilde{P} = \pi^{\mathrm{T}}$, $\pi_1 + \ldots + \pi_n = 1$, $\pi_1 > 0, \dots, \pi_n > 0$.*

Существует такое единственное $\zeta^* > 0$, что

а) если $\widetilde{P} = I$, то решение (10) удовлетворяет $a - b(a) = \zeta^* \pi$,

б) если $P = I$, то решение (10) удовлетворяет $b(a) = \zeta^* \pi$,

в) если $P = \widetilde{P}$, то решение (10) есть $a = \zeta^* \pi$.

Существует единственное решение $a(\zeta)$ уравнения $a - b(a) = \zeta\pi$. Если $0 < \zeta_1 < \zeta_2$, то $a(\zeta_1) < a(\zeta_2)$. Аналогичное утверждение верно в случаях б) и в).

Если ζ увеличивается, то $L(\mathbf{u}(a(\zeta)))$ увеличивается. Решение $\zeta^* > 0$ уравнения

$$L(\mathbf{u}(a(\zeta^*))) = r_1 d_1 + \ldots + r_n d_n.$$

существует и единственно.

Перейдем к обоснованию предложенных утверждений.

Доказательство теоремы 1. Предположим, что $p_{jv} + \tilde{p}_{jv} > 0$ при любых j и v. Обобщение на случай эргодичной $(P + \widetilde{P})/2$ не составляет труда.

Уравнение (6) можно записать в виде

$$\dot{\mathbf{u}} = \mathbf{f}(\mathbf{u}), \quad f\colon \mathbb{R}^\alpha \to \mathbb{R}^\alpha, \quad \mathbf{u} \in \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^\alpha.$$

Существование и единственность решения при достаточно малых временах следует из обычной теоремы существования и единственности. Пункт (а) теоремы 1 следует из следующей леммы.

Лемма 6. *При любом t множество $\mathcal{U}$ инвариантно относительно $\mathbf{u}(t,\cdot)$.*

Доказательство леммы подобно [2, лемма 1] или [4, теорема 2.1]. Перейдём к доказательству пунктов (б) и (в).

Лемма 7. *Существует такой компакт $\mathcal{U}_\varepsilon \subset \mathrm{Int}(\mathcal{U})$, который инвариантен относительно отображения $\mathbf{u}(t,\cdot)$ и $\forall \mathbf{g} \in \mathcal{U}$ за равномерно малое время t образ $\mathbf{u}(t,\mathbf{g}) \in \mathcal{U}_\varepsilon$.*

Доказательство. Ввиду [6] для доказательства достаточно показать выполнение следующих двух пунктов:

(а) для любой вершины $\mathbf{g}$ множества $\mathcal{U}$ вектор $\mathbf{f}(\mathbf{g})$ не равен нулю и при достаточно малых δ выполнено $\mathbf{g}+\delta\mathbf{f}(\mathbf{g})\in\mathcal{U}$,

(б) для любой грани $\Gamma\subset\mathcal{U}$ ($\Gamma\neq\mathcal{U}$), для любого $\mathbf{g}$, принадлежащего относительной внутренности Γ, вектор $\mathbf{g}+\mathbf{f}(\mathbf{g})$ не принадлежит аффинной оболочке этой грани и при достаточно малых δ выполнено $\mathbf{g}+\delta\mathbf{f}(\mathbf{g})\in\mathcal{U}$.

Пункт (а) проверяется непосредственно. Перейдём к доказательству выполнения пункта (б) в нашей системе.

Для любого $\mathbf{g}\in\mathcal{U}$ выполнение $\mathbf{g}+\delta\mathbf{f}(\mathbf{g})\in\mathcal{U}$ эквивалентно тому, что множество $\mathcal{U}$ инвариантно относительно системы $\dot{\mathbf{u}}=\mathbf{f}(\mathbf{u})$, что вытекает из леммы 6.

Обозначим через $\bar{S}$ множество всех n^2 упорядоченных пар (j,v) целых чисел $1\leqslant j,\ v\leqslant n$. Для $S\subset\bar{S}$ определим множество $G_S=\{\text{грани }\Gamma\subset\mathcal{U}\mid \forall\,(j,v)\in S\ \forall\mathbf{g}\in\operatorname{ri}\Gamma\ \langle\mathbf{g},\mathbf{e}_{M_{jv}}\rangle>0 \text{ и } \forall(j,v)\in\bar{S}\setminus S\ \forall\mathbf{g}\in\operatorname{ri}\Gamma\ \langle\mathbf{g},\mathbf{e}_{M_{jv}}\rangle=0\}$.

Если S пусто, то $\forall\mathbf{g}\in\Gamma\in G_S\ \forall(j,v)\ \langle\mathbf{g},\mathbf{e}_{M_{jv}}\rangle=0$. Поскольку $L(\mathbf{g})=$ $=r_1d_1+\ldots+r_nd_n>0$, найдутся j,i, такие что $\langle\mathbf{g},\mathbf{e}_{u_{j,i}}\rangle>0$, но из монотонной упорядоченности координат получаем, что $\langle\mathbf{g},\mathbf{e}_{u_{j,1}}\rangle>0$. Ввиду стохастичности матрицы P существует $p_{jv}\neq 0$. Отсюда получаем, что $\langle\mathbf{f}(\mathbf{g}),\mathbf{e}_{M_{jv}}\rangle=\lambda_j\langle\mathbf{g},\mathbf{e}_{u_{j,1}}\rangle p_{jv}>0$, а следовательно, $\mathbf{g}+\mathbf{f}(\mathbf{g})\notin\operatorname{aff}\Gamma$, поскольку $\forall\mathbf{h}\in\operatorname{aff}\Gamma\ \langle\mathbf{h},\mathbf{e}_{M_{jv}}\rangle=0$.

Пусть теперь $S=\bar{S}$. Для удобства записи введём вектора $\mathbf{e}_{u_{j,0}}=\mathbf{e}_{u_{j,m_j+1}}=0$. Для единообразия в пределах следующих двух абзацев будем считать, что $\langle\mathbf{g},\mathbf{e}_{u_{j,0}}\rangle=d_j$ (но $\langle\mathbf{f}(\mathbf{g}),\mathbf{e}_{u_{j,0}}\rangle=0$!). Для любой грани $\Gamma\in G_S$ существуют такие j и i, что (i) $1\leqslant j\leqslant n$, $0\leqslant i\leqslant m_j$; (ii) $\forall\mathbf{g}\in\operatorname{ri}(\Gamma)\ \langle\mathbf{g},\mathbf{e}_{u_{j,i}}\rangle=\langle\mathbf{g},\mathbf{e}_{u_{j,i+1}}\rangle$. Можно проверить, что $\langle\mathbf{f}(\mathbf{g}),\mathbf{e}_{u_{j,i}}-\mathbf{e}_{u_{j,i+1}}\rangle>0$, что завершает рассмотрение случая.

Рассмотрим случай $S\neq\bar{S}$ и $S\neq\varnothing$. Представим G_S в виде объединения $G_S=G'_S\cup G''_S$, где $G''_S=G_S\setminus G'_S$, а $G'_S=\{\Gamma\in G\mid$ существуют j,i, такие что выполнены условия (i) и (ii) предыдущего абзаца и $\exists w\ (w,j)\in S\}$. Для любой грани $\Gamma\in G'_S$ для любого $\mathbf{g}\in\Gamma$ можно проверить, что $\langle\mathbf{f}(\mathbf{g}),\mathbf{e}_{u_{j,i}}-\mathbf{e}_{u_{j,i+1}}\rangle>0$, что позволяет перейти к рассмотрению множества G''_S.

Поскольку $(P+\widetilde{P})/2>0$, $\exists(j,v)\notin S\ \exists w\ (w,j)\in S$: $p_{jv}\neq 0$, либо $\tilde{p}_{jv}\neq 0$. Пользуясь тем, что $\forall\mathbf{g}\in\Gamma\in G''_S\ \langle\mathbf{g},\mathbf{e}_{u_{j,1}}\rangle\geqslant\langle\mathbf{g},\mathbf{e}_{u_{j,m_j}}\rangle>0$, получаем $\langle\mathbf{f}(\mathbf{g}),\mathbf{e}_{M_{jv}}\rangle>0$, что и требовалось. $\square$

Заметим, что если стационарное решение $\mathbf{g}^*$ существует, то ввиду последней леммы $\mathbf{g}^*\in\mathcal{U}_\varepsilon$. Так же можно проверить утверждение (в) только для $\mathbf{g}\in\mathcal{U}_\varepsilon$.

Проверим выполнение условий теоремы [4, теорема 3.3] для нашей системы.

Система (6) обладает замечательным свойством: матрица Якоби $J(\mathbf{u})$ из частных производных правых частей (6) по компонентам вектора $\mathbf{u}$ имеет отрицательные элементы только по диагонали для любого $\mathbf{u}\in\mathcal{U}_\varepsilon$. Поскольку $\mathcal{U}_\varepsilon$ компактно, существует

$$c=\max_{\mathbf{u}\in\mathcal{U}_\varepsilon}\max_{1\leqslant i\leqslant\alpha}(-J_{ii}(\mathbf{u})).$$

Обозначим через I единичную матрицу. Далее мы покажем существование такой матрицы C, что

(i) $\forall \mathbf{u} \in \mathcal{U}_\varepsilon\ J(\mathbf{u}) + (c+1)I \geqslant C \geqslant 0$,

(ii) существует такое $c' > 0$, что матрица $c'C^{\mathrm{T}}$ является стохастической матрицей переходных вероятностей эргодичной дискретной цепи Маркова.

В этом случае из [4, теорема 3.3] вытекает, что для любого $\tau > 0$ отображение $\mathbf{u}(\tau, \cdot)\colon \mathcal{U}_\varepsilon \to \mathcal{U}_\varepsilon$ является сжимающим с коэффициентом сжатия, меньшим 1, т. е. $\forall \mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2 \in \mathcal{U}_\varepsilon\ \|\mathbf{u}(\tau, \mathbf{g}_2) - \mathbf{u}(\tau, \mathbf{g}_1)\| \leqslant \theta \|\mathbf{g}_2 - \mathbf{g}_1\|$, $\theta < 1$. Утверждения (б) и (в) теоремы 1 получаются как следствия теоремы о сжимающем отображении в полном метрическом пространстве.

Для проверки существования матрицы C со свойствами (i), (ii) достаточно убедиться, что при фиксированном $\mathbf{u} \in \mathcal{U}$ матрица $J^{\mathrm{T}}(\mathbf{u})$ является матрицей интенсивностей эргодичной цепи Маркова из α состояний с непрерывным временем. Из теории цепей Маркова следует, что последнее свойство можно проверять просто для $J(\mathbf{u})$.

Обозначим состояния цепи с матрицей интенсивностей переходов $J(\mathbf{u})$ через $\mathbf{e}_{u_{j,i}}$ и $\mathbf{e}_{M_{jv}}$. Интенсивность перехода между состояниями $\mathbf{e}_l$ и $\mathbf{e}_s$ равна $J_{ls}(\mathbf{u})$.

Переходы $\mathbf{e}_{u_{j,i}} \leftrightarrow \mathbf{e}_{u_{j,i+1}}$ при $i = 1, \dots, m_j - 1$ имеют место, поскольку частная производная $\dot{u_{j,i}}$ по $u_{j,i+1}$ равна $\lambda_j > 0$, а частная производная $\dot{u_{j,i}}$ по $u_{j,i-1}$ равна $M^j/d_j > 0$ (отметим, что $M^j > 0$ поскольку $\mathbf{u} \in \mathcal{U}_\varepsilon$).

Производная $\dot{u_{j,i}}$ по M_{kj} равна $\mu_{kj}(u_{j,i-1} - u_{j,i})/d_j > 0$, а следовательно, получаем наличие переходов $\mathbf{e}_{u_{j,i}} \to M_{kj}$ для произвольного k.

Взяв частную производную $\dot{M_{jv}}$ по $u_{j,1}$, убеждаемся в наличии перехода $\mathbf{e}_{M_{jv}} \to \mathbf{e}_{u_{j,1}}$ при $p_{jv} > 0$ и перехода $\mathbf{e}_{M_{jv}} \to \mathbf{e}_{u_{j,m_j}}$ при $\tilde{p}_{jv} > 0$.

Следовательно, для любого k есть опосредованная связь $\mathbf{e}_{M_{jv}} \to \mathbf{e}_{M_{kj}}$ при $p_{jv} + \tilde{p}_{jv} > 0$. В силу того, что $(P + \widetilde{P})/2 > 0$, все состояния $\{\mathbf{e}_{u_{j,i}}, \mathbf{e}_{M_{jv}}\}$ являются сообщающимися. Поскольку $\mathcal{U}_\varepsilon$ отделено от границы $\mathcal{U}$, свойство связности справедливо для любого $\mathbf{u} \in \mathcal{U}_\varepsilon$ и не нарушается при взятии минимума по всем таким $\mathbf{u} \in \mathcal{U}_\varepsilon$, а следовательно, (i) обосновано, а теорема 1 доказана. □

Из общей теоремы о сходимости марковских процессов (см. [8, глава 1, теорема 6.1]) аналогично [2] или [4] показывается справедливость теоремы 2.

Теорема 3 вытекает из теоремы 2 и, например, [8, глава 4, теорема 2.11]. Кроме того, теорему можно получить из теорем о сходимости чисто ступенчатых марковских процессов [7, том 2, глава IX, параграф 4b]. Там же читатель найдёт оценку скорости сходимости (отклонение имеет порядок $1/\sqrt{N}$).

Доказательство теоремы 4. Из компактности $\mathcal{U}$ вытекает, что вероятностные меры на $\mathcal{U}_N$ образуют множество, компактное относительно слабой сходимости. Из теоремы 2 следует, что всякая мера μ, являющаяся предельной точкой для последовательности мер $\mu_N \eta_N$, инвариантна относительно отображения $\mathbf{u}(t, \cdot)\colon \mathcal{U} \to \mathcal{U}$. Ввиду пунктов (б) и (в) теоремы 1 μ совпадает с мерой, сосредоточенной в точке $\mathbf{g}^*$, что завершает доказательство. □

Утверждения теоремы 5 проверяются непосредственно обычными методами математического анализа.

Автор считает приятным долгом выразить благодарность своему научному руководителю Л. Г. Афанасьевой за воодушевляющие обсуждения темы и содержания этой работы.

Литература

[1] Afanassieva L. G., Fayolle G., Popov S. Yu. Models for transportation networks // Journal of Mathematical Science. — 1997. — V. 84, no. 3. — P. 1092–1103.

[2] Введенская Н. Д., Добрушин Р. Л., Карпелевич Ф. И. Система обслуживания с выбором наименьшей из двух очередей — асимптотический подход // Проблемы передачи информации. — 1996. — Т. 32, вып. 1.

[3] Vvedenskaya N. D., Suhov Yu. M. Dobrushin's mean-field approximation for a queue with dynamic routing // Markov processes and related fields. — 1997. — No. 3. — P. 493–526.

[4] Khmelev D. V., Oseledets V. I. Mean-field approximation for stochastic transportation network and stability of dynamical system. — Preprint in the University of Bremen, Germany. — 1998.

[5] Mitzenmacher M. The power of two choices in randomized load balancing. — PhD thesis, University of California at Berkley, September 1996.

[6] Хмелёв Д. В. О существовании инвариантного компакта внутри фазового пространства динамической системы // Труды конференции молодых ученых МГУ 1998 г.

[7] Жакод Ж., Ширяев А. Н. Предельные теоремы для случайных процессов. Т. 3. — М.: Наука, 1994.

[8] Either S. N., Kurtz T. G. Markov processes characterization and convergence. — N.Y.: John Willey and Sons, 1986.

Статья поступила в редакцию в декабре 1998 г.