# Большие транспортные сети с конечномерным пространством состояний. Асимптотический подход.

Л.Г. Афанасьева, Д.В. Хмелёв

1999

Рассмотрим сеть из $N$ узлов (станций), которые делятся на $n$ районов. При увеличении $N$ количество районов остается неизменным. Количество станций в районе $j$ равно $d_j^N N$, $\sum_{j=1}^n d_j^N = 1$, $d_j^N N$ — целое число для всякого $j$ и $N$. Существуют такие $d_j > 0$, что $\sqrt{N}(d_j^N - d_j) \xrightarrow{N\to\infty} 0$ для $j = \overline{1,n}$. Далее $j$ и $v$ обозначают номер района и могут принимать значения от 1 до $n$. На станцию в $j$-м районе требования поступают пуассоновским потоком с интенсивностью $\lambda_j$. Если на станции есть обслуживающий прибор, то, в соответствии со стохастической матрицей $P = \{p_{jv}\}_{j,v=\overline{1,n}}$, требование вместе с прибором направляется на станцию в $v$-го района, которая он выбирает равновероятно среди всех станций $v$-го района. Обслуживание требования состоит в его перемещении с одной станции до другой.

В [1] рассмотрена полностью симметричная сеть. Наша модель является обобщением [1] в сторону асимметрии. Время перемещения от станции $j$-го района до станции $v$-го района распределено экспоненциально с параметром $\mu_{jv}$. Время движения между станциями внутри $j$-го района также экспоненциально распределено с параметром $\mu_{jj}$. Если на станции нет ни одного прибора и есть места ожидания, то требовование встает в очередь, иначе требование теряется для системы. Все станции $v$-го района однотипны — на каждой из них может базироваться не более $m_v$ автомобилей и на каждой $k_v$ мест для пассажиров. Если прибор, который прибыл в $v$-тый район, не находит свободной стоянки, то он направляется (без требования) в район $l$ в соответствии со стохастической матрицей

$\widetilde{P} = \{\tilde{p}_{vl}\}_{v,l=\overline{1,n}}$; станция $l$-го района выбирается равновероятно среди $d_l^N N$ станций района. Первоначально на всех станциях в $j$-м районе находится $r_j$ автомобилей, где $r_j$ — целые числа от 1 до $m_j$. Потребуем, чтобы матрица $P\widetilde{P}$ обладала единственной инвариантной мерой $\pi = (\pi_1, \ldots, \pi_n)^T$: $\pi^T P\widetilde{P} = \pi^T$, $\pi_1 + \ldots \pi_n = 1$, $\pi \geq 0$.

Обозначим через $x_{j,i}(t)$ долю узлов в состоянии $i$ в районе $j$ среди всех $N$ станций, $\sum_{i=-k_j}^{m_j} x_{j,i}(t) = d_j^N$; через $\widetilde{M}_{jv}(t)$ количество приборов, которые покинули $j$-тый район и в момент $t$ направляются на станцию в $v$-м районе. Определим процесс $M_{jv}(t) = \widetilde{M}_{jv}(t)/N$. Запишем состояние системы как вектор $x \in \mathbf{R}^\alpha$ длиной $\alpha = n^2 + \sum_{v=1}^n (k_v + m_v + 1)$: $x = (M_{11}, M_{12}, \ldots, M_{1n}, M_{21}, \ldots, M_{nn}, x_{1,-k_1}, x_{1,-k_1+1}, \ldots, x_{1,m_1}, x_{2,-k_2}, \ldots, x_{n,m_n})$. Для фиксированного $N$ случайный процесс $X_t^N = x(t)$ является эргодичной цепью Маркова.

Пусть $x_t(x)$ — решение следующей системы дифференциальных уравнений с начальным условием $x_0(x) = x$: для $j$, $v = \overline{1,n}$

$$\begin{aligned} \dot{x}_{j,-k_j} &= (\lambda_j d_j x_{j,-k_j+1} - M^j x_{j,-k_j})/d_j, \\ \dot{x}_{j,i} &= (\lambda_j d_j x_{j,i+1} - (\lambda_j d_j + M^j) x_{j,i} + M^j x_{j,i-1})/d_j, \qquad (1) \\ \dot{x}_{j,m_j} &= (-\lambda_j d_j x_{j,m_j} + M^j x_{j,m_j-1})/d_j, \\ \dot{M}_{jv} &= p_{jv}(\lambda_j d_j S_j^+ + M^j S_j^-) - \mu_{jv} M_{jv} + d_j M^j x_{j,m_j} \tilde{p}_{jv}, \qquad (2) \end{aligned}$$

где $S_j^+ \equiv d_j \sum_{i=1}^{m_j} x_{j,i}$, $S_j^- \equiv d_j \sum_{i=-k_j}^{-1} x_{j,i}$, $M^j = \sum_{l=1}^n \mu_{lj} M_{lj}$. Обозначим через $\varepsilon_x$ распределение, сосредоточенное в точке $x \in \mathbf{R}^\alpha$.

**Теорема 1.** *Пусть $X_0^N \to \varepsilon_x$ слабо. Справедливы утверждения*

*(i) $\sup\limits_{s \leq t} |X_s^N - x_s(x)| \xrightarrow{P} 0$ для всех $t \geq 0$ при $N \to \infty$.*

*(ii) Процессы $\sqrt{N}(X_t^N - x_t(x))$ сходятся по распределению к непрерывному процессу с независимыми приращениями $Y$ с ковариационной функцией $\hat{C}(x)$, где $\hat{C}(x) = \int\limits_0^t \hat{c}(x_s(x))ds$, а $c\colon \mathbf{R}^\alpha \to \mathbf{R}^{\alpha^2}$ — некоторая явная матричная функция.*

Полученные результаты позволяют изучать характеристики $X_t^N$ посредством изучения нелинейной динамической системы $x_t(x)$, которая, как показывает имитационное моделирование, является хорошим приближением.

[1] L.G. Afanassieva, G. Fayolle, S.Yu. Popov. *Models for transportation networks.*